2.5. Układy równań liniowych

Definicja 2.24. *Układem* m *równań liniowych o* n *niewiadomych* $(x_1, x_2, ..., x_n)$ nazywamy układ postaci

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \cdots \vdots \quad \cdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1}$$

gdzie $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.

Definicja 2.25. *Rozwiązaniem układu* (1) nazywamy ciąg liczb rzeczywistych $(x_1, x_2, ..., x_n)$ spełniających ten układ.

Definicja 2.26. Układ (1) nazywamy *jednorodnym,* jeżeli

$$b_1 = b_2 = ... = b_m = 0.$$

Macierz A o wymiarze $m \times n$ ułożoną ze współczynników przy niewiadomych postaci

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

nazywamy *macierzą układu* (1). Wprowadźmy również oznaczenia

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Macierz B nazywamy *kolumną wyrazów wolnych* zaś macierz X nazywamy *kolumną niewiadomych* .Zatem układ (1) można zapisać w następujący postaci macierzowej

$$A \cdot X = B. \tag{2}$$

Załóżmy najpierw, że macierz układu (1) jest macierzą kwadratową stopnia n, tzn. $m = n$.

Definicja 2.27. Układ (1) (lub (2)) nazywamy *układem Cramera*, jeżeli macierz układu jest nieosobliwa, tzn. $|A| \neq 0$.

Twierdzenie 2.17 (Cramera). Układ Cramera ma dokładnie jedno rozwiązanie, dane następującymi wzorami

$$x_1 = \frac{D_1}{|A|}, \quad x_2 = \frac{D_2}{|A|}, \ ..., \ x_n = \frac{D_n}{|A|}, \tag{3}$$

gdzie dla każdego $1 \le k \le n$ liczba D_k jest wyznacznikiem macierzy powstałej z A przez zastąpienie jej k-tej kolumny kolumną wyrazów wolnych B.

Wzory (3) nazywamy *wzorami Cramera.* Zaznaczmy również, że korzystając ze wzoru (2.10) (twierdzenia Laplace'a) wyznaczniki D_k można zapisać w postaci

$$D_k = b_1 A_{1k} + b_2 A_{2k} + \cdots + b_n A_{nk}, \qquad 1 \le k \le n.$$

Wniosek. Jednorodny układ Cramera ma zerowe rozwiązanie

$$x_1 = x_2 = \ ... \ = x_n = 0 .$$

Przykład 2.20. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 2x - y - z = 4, \\ 3x + 4y - 2z = 11, \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases}$$

Rozwiązanie. Mamy tutaj

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Podany układ jest układem Cramera, ponieważ

$$|A| = 32 + 6 + 6 - (-12 + 8 - 12) = 60 .$$

Zatem w celu znalezienia niewiadomych x, y, z możemy skorzystać ze wzorów Cramera (3). Najpierw obliczymy wyznaczniki D_k, $k = 1,2,3$.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 64 + 22 + 24 - (-44 + 16 - 44) = 180 ,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 88 - 33 - 24 - (-33 - 44 + 48) = 60 ,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 88 - 24 - 33 - (48 - 44 - 33) = 60 .$$

Podstawiając do wzorów Cramera ostatecznie otrzymamy

$$x = \frac{D_1}{|A|} = \frac{120}{60} = 3, \qquad y = \frac{D_2}{|A|} = \frac{60}{60} = 1, \qquad z = \frac{D_3}{|A|} = \frac{60}{60} = 1.$$

Korzystając z postaci (2) układ Cramera można również rozwiązać stosując tak zwaną *metodę macierzową*. Ta metoda polega na rozwiązywaniu równania macierzowego. Ponieważ macierz układu Cramera A jest nieosobliwa, więc istnieje macierz odwrotna A^{-1}. Wobec tego mnożąc lewostronnie obie strony równania (2) przez A^{-1} otrzymamy

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B .$$

Stąd

$$X = A^{-1} \cdot B . \tag{4}$$

Wynika to bezpośrednio z równości (2.4).

Przykład 2.21. Rozwiązać metodą macierzową układ równań

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1, \\ 2x - y + 5z = 1, \\ 3x - 4y + 8z = 3. \end{cases}$$

Rozwiązanie. Mamy tutaj

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & -4 & 8 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Ponieważ

$$|A| = -8 - 24 - 30 + 9 + 20 + 32 = -1,$$

więc rozważany układ jest układem Cramera.

Obliczamy macierz A^{-1} odwrotną do A. Wyznaczamy dopełnienia algebraiczne elementów macierzy A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} = 12, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3.$$

Zatem

$$A^{-1} = \frac{A^D}{|A|} = \frac{1}{-1}\left[A_{ij}\right]^T = -\begin{bmatrix} 12 & -1 & -5 \\ 4 & -1 & -2 \\ -7 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -12 & -4 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Podstawiając do równania (4) otrzymamy

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & -4 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12-4+21 \\ 1+1-3 \\ 5+2-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ostatecznie rozwiązanie układu ma postać

$$x = 5, \quad y = -1, \quad z = -2.$$

Rozważmy teraz dowolny układ równań liniowych postaci (1), tzn. taki, którego macierz układu A jest macierzą prostokątną o wymiarze $m \times n$.

Definicja 2.28. *Macierzą rozszerzoną* układu (1) nazywamy macierz C o wymiarze $m \times (n+1)$, utworzoną z macierzy układu poprzez dołączenie do niej kolumny wyrazów wolnych, tzn. macierz postaci

$$C = \left[A \mid B\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 2.18 (Kroneckera-Capelliego). Układ (1) ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$rząd(A) = rząd(C) = r.$$

Ponadto ma dokładnie jedno rozwiązanie, gdy $r = n$ oraz nieskończenie wielu rozwiązań zależnych od $n - r$ parametrów, gdy $r < n$.

Za pomocą twierdzenie Kroneckera-Capelliego można zbadać i ewentualnie rozwiązać każdy układ równań liniowych.

Przykład 2.22. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1, \\ 2x - 2y + z = 1. \end{cases}$$

Rozwiązanie. Mamy tutaj

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},\qquad X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}.$$

Macierz rozszerzona C ma postać

$$C=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & 1\\ 2 & -2 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Rząd macierzy A wynosi 2, gdyż minor utworzony ze współczynników przy x i y

$$\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -2\end{vmatrix}=2\neq 0.$$

Ponieważ macierz C zawiera powyższy minor oraz $rząd(C)$ nie może być większy niż 2, wiec

$$rząd(C)=rząd(A)=2.$$

Zatem z twierdzenia Kroneckera-Capelliego wynika, że układ ma nieskończenie wielu rozwiązań zależnych od jednego parametru, gdyż $n-r=3-2=1$. Następnie zakładając, że niewiadoma z jest parametrem przenosimy ją na prawą stronę i rozwiązujemy układ

$$\begin{cases}x-2y=1-3z,\\ 2x-2y=1-z\end{cases}$$

względem x i y. Ten układ jest układem Cramera, gdyż obliczony minor jest wyznacznikiem macierzy układu. Zatem obliczamy

$$D_1=\begin{vmatrix}1-3z & -2\\ 1-z & -2\end{vmatrix}=(-2)\cdot(1-3z)+2(1-z)=4z,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 1-3z\\ 2 & 1-z\end{vmatrix}=1-z-2\cdot(1-3z)=5z-1.$$

Więc stosując wzory Cramera otrzymamy rozwiązanie

$$x=\frac{4z}{2}=2z,\qquad y=\frac{5z-1}{2}=\frac{5}{2}z-\frac{1}{2},$$

gdzie z jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Przykład 2.23. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases}3x-y=1,\\ x+y=3,\\ 2x+3y=8.\end{cases}$$

Rozwiązanie. Mamy tutaj

$$A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}1\\ 3\\ 8\end{bmatrix},\qquad X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}.$$

Ponieważ istnieje różny od zera minor stopnia 2 macierzy A, na przykład

$$\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=4\neq 0,$$

więc $rząd(A)=2$. Macierz rozszerzona układu jest macierzą kwadratową postaci

$$C=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 8\end{bmatrix}.$$

Zatem $rząd(C)$ może być co najwyżej równy 3. Obliczymy najpierw wyznacznik macierzy C. Dodając do elementów pierwszej kolumny elementy drugiej kolumny pomnożone przez liczbę 2 otrzymamy

$$|C| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+2\cdot(-1) & -1 & 1 \\ 1+2\cdot 1 & 1 & 3 \\ 2+2\cdot 3 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 8 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 0 .$$

Stąd $rząd(C) < 3$. Ponieważ macierz C zawiera obliczony wyżej minor macierzy A, więc $rząd(C) = 2$. Zatem z twierdzenia Kroneckera-Capelliego wynika, że układ ma dokładnie jedno rozwiązanie, gdyż $n = r = 2$. Więc pomijamy równanie trzecie układu, tzn. równanie, które nie jest objęte obliczonym minorem i rozwiązujemy układ Cramera postaci

$$\begin{cases} 3x - y = 1, \\ x + y = 3. \end{cases}$$

Ostatecznie otrzymamy

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4}{4} = 1, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{8}{4} = 2 .$$

Przykład 2.24. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1, \\ x + 3y - 4z = 0, \\ x - 4y + 7z = -1. \end{cases}$$

Rozwiązanie. Obliczamy wyznacznik macierzy układu

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 63 + 4 - 8 + 3 - 48 - 14 = 0 .$$

Zatem układ nie jest układem Cramera, a więc nie możemy stosować wzorów Cramera.. Zbadamy rząd macierzy układu. Ponieważ minor

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0,$$

więc $rząd(A) = 2$. Macierz rozszerzona układu ma postać

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 7 & -1 \end{bmatrix}.$$

Badamy rząd macierzy C. Usuwając trzecią kolumnę i obliczając wartość otrzymanego minora stopnia 3 mamy

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -9 - 4 + 0 - 3 - 0 + 2 = -14 \neq 0 .$$

Stąd $rząd(C) = 3$. Ponieważ $rząd(A) \neq rząd(C)$, więc z twierdzenia Kroneckera-Capelliego wynika, że układ nie ma rozwiązań, tzn. jest sprzeczny.

Przykład 2.25. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x+y+z+2t=3, \\ 2x-y+3z+4t=4, \\ x+2y-3z+2t=0, \\ 3x-3y-z+6t=-1. \end{cases}$$

Rozwiązanie. Mamy tutaj

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & -3 & -1 & 6 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}, \quad C=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & 6 & -1 \end{bmatrix}.$$

Obliczamy wyznacznik macierzy układu. Łatwo zauważyć, że mnożąc elementy pierwszej kolumny macierzy A przez liczbę 2 otrzymamy czwartą kolumnę. Zatem korzystając z własności wyznaczników mamy

$$|A|=\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 2\cdot 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2\cdot 2 & -1 & 3 & 4 \\ 2\cdot 1 & 2 & -3 & 2 \\ 2\cdot 3 & -3 & -1 & 6 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -3 & 2 \\ 6 & -3 & -1 & 6 \end{vmatrix}=0.$$

To oznacza, że $rząd(A)<4$. Sprawdzimy czy istnieje niezerowy minor stopnia 3. Skreślając ostatni wiersz i ostatnią kolumnę macierzy A otzymamy minor postaci

$$M=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}=3+4+3+1-6+6=11\neq 0.$$

Stąd wynika, że $rząd(A)=3$. Obliczmy teraz rząd macierzy rozszerzonej C. Ponieważ wszystkie minory stopnia 4 zawierające pierwszą i czwartą kolumny są zerowe (te kolumny są liniowo zależne), więc wystarczy sprawdzić dwa minory otrzymane po usunięciu tych kolumn. Najpierw usuwamy czwartą kolumnę macierzy C. Korzystając z własności wyznaczników mamy

$$M_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+1+1 & 3 \\ 2 & -1 & 3+2-1 & 4 \\ 1 & 2 & -3+2+1 & 0 \\ 3 & -3 & -1+3-3 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0.$$

Podobnie, usuwając pierwszą kolumnę otrzymamy minor

$$M_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 6 & -1 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=2M_1=0.$$

Stąd wynika, że nie istnieje niezerowy minor stopnia 4 macierzy rozszerzonej, a więc $rząd(C)=rząd(A)=3$. Zatem z twierdzenia Kroneckera-Capelliego wynika, że układ ma nieskończenie wielu rozwiązań zależnych od jednego parametru, gdyż $n-r=4-3=1$. Następnie zakładając, że niewiadoma t jest parametrem przenosimy je na prawą stronę. Pomijamy również równanie czwarte układu, tzn. równanie, które nie jest objęte obliczonym minorem M. Więc otrzymamy układ Cramera

$$\begin{cases} x+y+z=3-2t, \\ 2x-y+3z=4-4t, \\ x+2y-3z=-2t. \end{cases}$$

Obliczamy

$$D_1=\begin{vmatrix}3-2t & 1 & 1\\ 4-4t & -1 & 3\\ -2t & 2 & -3\end{vmatrix}=-22t+11,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 3-2t & 1\\ 2 & 4-4t & 3\\ 1 & -2t & -3\end{vmatrix}=11,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & 3-2t\\ 2 & -1 & 4-4t\\ 1 & -3 & -2t\end{vmatrix}=11.$$

Ostatecznie stosując wzory Cramera otrzymamy rozwiązanie układu:

$$x=\frac{D_1}{M}=\frac{-22t+11}{11}=-2t+1;\quad y=\frac{D_2}{M}=\frac{11}{11}=1;\quad z=\frac{D_3}{M}=\frac{11}{11}=1,$$

gdzie t jest dowolną liczbą rzeczywista.

Przykład 2.26. Zbadać dla jakich wartości parametru $\lambda\in\mathbb{R}$ podany układ jest rozwiązywalny

$$\begin{cases}\lambda x+y+z=1,\\ x+\lambda y+z=\lambda,\\ x+y+\lambda z=\lambda^2.\end{cases}$$

Rozwiązanie. Zbadamy najpierw wyznacznik macierzy układu. Mamy

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^3+2-3\lambda.$$

Ponieważ

$$\lambda^3-3\lambda+2=\lambda(\lambda^2-1)-2(\lambda-1)=(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-2)=(\lambda-1)^2(\lambda+2),$$

więc

$$|A|=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

i $|A|=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda=1$ lub $\lambda=-2$. Zatem, jeżeli $\lambda\neq 1$ i $\lambda\neq -2$, to układ jest układem Cramera i ma dokładnie jedno rozwiązanie. Obliczamy wyznaczniki

$$D_1=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \lambda & \lambda & 1\\ \lambda^2 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+\lambda+\lambda^2-\lambda^3-1-\lambda^2=-(\lambda-1)^2(\lambda+1),$$

$$D_2=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & \lambda^2 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^3+\lambda^2+1-\lambda-\lambda^3-\lambda=\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & \lambda\\ 1 & 1 & \lambda^2\end{vmatrix}=\lambda^4+1+\lambda-\lambda-\lambda^2-\lambda^2=\lambda^4-2\lambda^2+1=(\lambda^2-1)^2.$$

Zatem stosując wzory Cramera otrzymamy rozwiązanie układu

$$x = \frac{D_1}{|A|} = \frac{-(\lambda-1)^2(\lambda+1)}{(\lambda-1)^2(\lambda+2)} = \frac{-\lambda-1}{\lambda+2};$$

$$y = \frac{D_2}{|A|} = \frac{(\lambda-1)^2}{(\lambda-1)^2(\lambda+2)} = \frac{1}{\lambda+2};$$

$$z = \frac{D_3}{|A|} = \frac{(\lambda^2-1)^2}{(\lambda-1)^2(\lambda+2)} = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}.$$

Jeżeli $\lambda = 1$, to układ ma postać

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x + y + z = 1, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że w tym przypadku $rząd(A) = rząd(C) = 1$. Więc z twierdzenia Kroneckera-Capelliego wynika, że istnieje nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od dwóch parametrów, gdyż $n - r = 3 - 1 = 2$. Zatem rozwiązanie układu można przedstawić w postaci

$$x = 1 - y - z,$$

gdzie y i z są dowolne liczby rzeczywiste.

W przypadku $\lambda = -2$ mamy układ

$$\begin{cases} -2x + y + z = 1, \\ x - 2y + z = -2, \\ x + y - 2z = 4. \end{cases}$$

Macierz rozszerzona ma postać

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Skreślając trzecią kolumnę otrzymujemy wyznacznik

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 1 - 2 + 2 - 4 - 4 = 9 \neq 0$$

To oznacza, że $rząd(C) = 3$. Ponieważ $rząd(A) < 3$, więc $rząd(C) \neq rząd(A)$.

Zatem w przypadku $\lambda = -2$ układ nie ma rozwiązania, czyli jest sprzeczny.

Opracowanie:
dr Igor Kierkosz
dr hab. Volodymyr Sushch